

Sesión de resolución de problemas

24/01/2020

Ejercicio 1. *En un tablero de damas 8×8 colocamos 24 fichas de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos hacer el siguiente movimiento: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?*

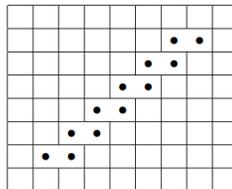
Ejercicio 2. *¿Se puede formar un bloque $10 \times 10 \times 10$ con bloques $1 \times 1 \times 4$?*

Ejercicio 3. *Se colocan 65 escarabajos en distintas casillas de un tablero 9×9 . Cada segundo, cada escarabajo se mueve una casilla en dirección vertical u horizontal, y de forma que no se mueve dos veces seguidas en dirección vertical u horizontal. Prueba que en algún momento habrá alguna casilla con al menos dos escarabajos.*

Ejercicio 4. *Dividimos cada lado de un triángulo equilátero en 6 partes iguales, y trazando paralelas a los lados del triángulo original obtenemos 36 triángulos pequeños. En cada vértice de estos triángulos colocamos un escarabajo. Cada segundo, cada escarabajo se mueve a un vértice adyacente de forma que siempre giran 60 o 120 grados entre dos movimientos consecutivos. Prueba que en algún momento al menos dos escarabajos coinciden en el mismo vértice.*

Ejercicio 5. *Tenemos un tablero cuadrado 9×9 y 20 tetrominós en forma de *s*. El objetivo es ir colocando las piezas (que se pueden rotar y voltear) cubriendo el mayor número de cuadrados posible. Cada cuadrado de la pieza ocupa exactamente un cuadrado del tablero y las piezas no se pueden solapar. ¿Cuál es el menor número de cuadrados que pueden dejarse vacíos en el tablero al recubrirlo con este tipo de piezas?*

Ejercicio 6. *¿Cuántas fichas de dominó podemos colocar en un tablero 8×9 si ya hay 6 colocadas como indica la figura?*



Ejercicio 7. *Dos jugadores colocan monedas alternativamente en un tablero de ajedrez de 2008×2008 casillas. Gana el primer jugador que consiga poner una moneda que forme, con otras tres monedas del tablero, los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero. ¿Qué jugador tiene una estrategia ganadora?*

Ejercicio 8. Dos jugadores juegan en un tablero infinito de casillas 1×1 . El jugador A escoge una casilla en blanco y la marca con una O. Después, el jugador B escoge otra casilla en blanco y la marca con una X. El objetivo es marcar cinco casillas consecutivas en una fila o columna con su símbolo. Muestra que ningún jugador tiene estrategia ganadora.

Ejercicio 9. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Tenemos m cajas. A y B juegan por turnos. En su turno, A escoge dos cajas y mete una pelota en cada una de ellas. En su turno, B escoge una caja y saca todas las pelotas. Encuentra el mínimo m tal que A puede asegurar que haya n pelotas en una caja después de algún turno de B.

Ejercicio 10. Mr. Fat y Mr. Taf hacen un truco de magia. Sin que Mr. Taf pueda verlo, un espectador escribe N dígitos (del 0 al 9) alineados en una pizarra. Seguidamente, Mr. Fat tapa dos dígitos consecutivos con un disco. Entonces Mr. Taf mira la pizarra y es capaz de averiguar los dígitos que tapa el disco, y su orden. ¿Cuál es el valor mínimo de N para que funcione el truco?

Ejercicio 11. Un juego se juega en un tablero de 1×2000 casillas. Por turnos, dos jugadores escriben o bien la letra S o bien la O en una casilla vacía. El primer jugador que consiga deletrear SOS en tres casillas adyacentes gana; si se rellena el tablero sin que aparezca SOS en ningún momento hay un empate. Probar que el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

Ejercicio 12. Doscientos estudiantes participaron en un concurso de matemáticas. Tuvieron que resolver 6 problemas. Se sabe que cada problema fue resuelto correctamente por al menos 120 estudiantes. Prueba que deben haber dos participantes tales que cada problema fue resuelto por al menos uno de ellos.

Ejercicio 13. En una competición, hay a participantes y b jueces, donde $b \geq 3$ es un entero impar. Cada juez valora cada concursante con aprobado o suspenso. k es un número tal que, para cada dos jueces, su puntuación coincide en como mucho k concursantes. Prueba que $k/a \geq (b - 1)/2b$.

Ejercicio 14. n estudiantes participaron en un concurso de matemáticas. Tuvieron que resolver 6 problemas. Se sabe que cada dos problemas fueron resueltos correctamente por más de $2/5$ de los estudiantes. Nadie resolvió los 6 problemas. Prueba que al menos dos estudiantes resolvieron 5 problemas.

Ejercicio 15. En una exposición hay 100 cuadros, cada uno hecho con exactamente k colores. Encuentra el valor mínimo de k sabiendo que cualesquiera 20 cuadros tienen algún color común pero ningún color se usa en todos los cuadros.